LICEUL TEORETIC "BOLYAI FARKAS" ELMÉLETI LÍCEUM
TÎRGU MUREȘ MAROSVÁSÁRHELY
540064
STR. BOLYAI NR.3
Telefon/Fax/0365-882749, 0365-882748
E-mail: bolyai@bolyai.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Javítókulcs – VI. osztály

1.Feladat

Határozd meg az a, b és c prímszámokat, amelyekre teljesül a $3a + 7b + 9c = 87$ összefüggés.

Megoldás:

I. módszer
Hivatalból 1 pont.

A $3a + 7b + 9c = 87$ összefüggés miatt
$c < 10$ és c prím $\Rightarrow c \in \{2; 3; 5; 7\}$..**2p**

I. Ha $c = 2 \Rightarrow 3a + 7b = 69 \Rightarrow b < 10$ és b prím $\Rightarrow$ $b \in \{2; 3; 5; 7\}$
- i. Ha $b = 2 \Rightarrow 3a = 55 \Rightarrow a$ nem természetes
- ii. Ha $b = 3 \Rightarrow 3a = 48 \Rightarrow a = 16$, de ez nem jó, mert a prím
- iii. Ha $b = 5 \Rightarrow 3a = 34 \Rightarrow a$ nem természetes
- iv. Ha $b = 7 \Rightarrow 3a = 20 \Rightarrow a$ nem természetes.......................................**1.5p**

II. Ha $c = 3 \Rightarrow 3a + 7b = 60 \Rightarrow$ $b < 9$ és b prím $\Rightarrow$ $b \in \{2; 3; 5; 7\}$
- i. Ha $b = 2 \Rightarrow 3a = 46 \Rightarrow a$ nem természetes
- ii. Ha $b = 3 \Rightarrow 3a = 39 \Rightarrow a = 13$
- iii. Ha $b = 5 \Rightarrow 3a = 25 \Rightarrow a$ nem természetes
- iv. Ha $b = 7 \Rightarrow 3a = 11 \Rightarrow a$ nem természetes.......................................**1.5p**

III. Ha $c = 5 \Rightarrow 3a + 7b = 42 \Rightarrow b \leq 6$ és b prím $\Rightarrow$ $b \in \{2; 3; 5\}$
- i. Ha $b = 2 \Rightarrow 3a = 28 \Rightarrow a$ nem természetes
- ii. Ha $b = 3 \Rightarrow 3a = 21 \Rightarrow a = 7$
- iii. Ha $b = 5 \Rightarrow 3a = 7 \Rightarrow a$ nem természetes.......................................**1.5p**

IV. Ha $c = 7 \Rightarrow 3a + 7b = 24 \Rightarrow b < 4$ és b prím $\Rightarrow$ $b \in \{2; 3\}$
- i. Ha $b = 2 \Rightarrow 3a = 10 \Rightarrow a$ nem természetes
- ii. Ha $b = 3 \Rightarrow 3a = 3 \Rightarrow a = 1$, de ez nem jó, mert a prím **1.5p**

Megoldás: (a;b;c)$\in \{(13; 3; 3); (7; 3; 5)\}$ **1p**

II. Módszer:
Hivatalból 1 pont.

$3a + 7b + 9c = 87 \Rightarrow 7b \,\vdots\, 3$ és b prím $\Rightarrow b = 3$ **2p**
$3a + 7 \cdot 3 + 9c = 87$
$a + 3c = 22 \Rightarrow a, c$ páratlanok...**2p**
$3c < 22 \Rightarrow c \leq 7 \Rightarrow c \in \{3; 5; 7\}$...**1p**

- I. Ha $c = 7 \Rightarrow a = 1$, nem prim..**1p**
- II. Ha $c = 5 \Rightarrow a = 7$..**1p**
- III. Ha $c = 3 \Rightarrow a = 13$..**1p**

LICEUL TEORETIC "BOLYAI FARKAS" ELMÉLETI LÍCEUM
TÎRGU MUREȘ MAROSVÁSÁRHELY
540064
STR. BOLYAI NR.3
Telefon/Fax/0365-882749, 0365-882748
E-mail: bolyai@bolyai.ro

Megoldás: (a;b;c)$\in \{(13;3;3);(7;3;5)\}$ ……………………………………………..……………………**1p**

2.Feladat

Adott az $a = 63^n + 7^{n+1} \cdot 3^{2n+1} - 21^n \cdot 3^{n+2}$ és $b = 15^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 5^{n+2} + 27 \cdot 15^n$ számok, ahol $n \in \mathbb{N}^*$. Határozd meg az a és b szám legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösösét!

Megoldás:
Hivatalból 1 pont.

Felbontjuk az a és b természetes számokat prímtényezők szorzatává, felhasználva a hatványok tulajdonságait és a közös tényező kiemelését.

$a = 63^n + 7^{n+1} \cdot 3^{2n+1} - 21^n \cdot 3^{n+2} = (3^2 \cdot 7)^n + 7^{n+1} \cdot 3^{2n+1} - (3 \cdot 7)^n \cdot 3^{n+2}$
$= 3^{2n} \cdot 7^n + 7^{n+1} \cdot 3^{2n+1} - 3^{2n+2} \cdot 7^n$
$= 3^{2n} \cdot 7^n \cdot (1 + 7 \cdot 3 + 3^2) = 3^{2n} \cdot 7^n \cdot 13$……………………………………………………**2.5p**

$b = 15^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 5^{n+2} + 27 \cdot 15^n = (3 \cdot 5)^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 5^{n+2} + 3^3 \cdot (3 \cdot 5)^n$
$= 3^{n+1} \cdot 5^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 5^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 5^n = 3^{n+1} \cdot 5^n \cdot (5 + 5^2 + 3^2)$
$= 3^{n+1} \cdot 5^n \cdot 39 = 3^{n+2} \cdot 5^n \cdot 13$ ……………………………………………………………**2.5p**

Tehát $a = 3^{2n} \cdot 7^n \cdot 13$ és $b = 3^{n+2} \cdot 5^n \cdot 13$.

Ha $2n \geq n + 2$, vagyis $n \geq 2$, akkor $(a;b) = 3^{n+2} \cdot 13$ és $[a;b] = 3^{2n} \cdot 5^n \cdot 7^n \cdot 13$;………...……..**2p**
Ha $n = 1$, akkor $a = 3^2 \cdot 7 \cdot 13$ és $b = 3^3 \cdot 5 \cdot 13$, tehát $(a;b) = 3^2 \cdot 13$ és $[a;b] = 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$.….**2p**

3.Feladat

Az AD és BC egyenesek az O pontban metszik egymást, $m(AOB\measuredangle) < 60^\circ$. Legyen $(OE$ a $BOD\measuredangle$ szögfelezője, $(OF$ pedig az $EOC\measuredangle$ szögfelezője, ahol $(OF \subset Int(EOD\measuredangle)$.

a) Határozd meg az $AOB\measuredangle$ mértékét, ha tudjuk, hogy $m(FOD\measuredangle) = 30^\circ$.
b) Ha $(OH$ a $DOC\measuredangle$ szögfelezője, igazoljátok, hogy $m(EOH\measuredangle) = 90^\circ$.

Megoldás:
Hivatalból 1 pont.

a) Legyen $m(\widehat{EOF}) = x \Rightarrow m(\widehat{FOC}) = x$ és $m(\widehat{EOD}) = x + 30^\circ \Rightarrow m(\widehat{BOE}) = x + 30^\circ$....................**2p**
Felírhatjuk, hogy:
$m(\widehat{BOE}) + m(\widehat{EOF}) + m(\widehat{FOC}) = 180^\circ \Rightarrow$...**1p**
$\Rightarrow x + 30^\circ + x + x = 180^\circ \Rightarrow 3x = 150^\circ \Rightarrow x = 50^\circ$...**1p**
Azt kapjuk, hogy $m(\widehat{EOD}) = 80^\circ \Rightarrow m(\widehat{AOB}) = 180^\circ - m(\widehat{BOD}) = 180^\circ - 2 \cdot 80^\circ = 20^\circ$......**2p**

b) $\widehat{BOD}$ és $\widehat{DOC}$ kiegészítő szögek, így az $(OE$ és $(OH$ szögfelezőik merőlegesek egymásra. Ezt a következőképpen bizonyíthatjuk be:

$$m(\widehat{EOH}) = m(\widehat{EOD}) + m(\widehat{DOH}) = m(\widehat{BOD}):2 + m(\widehat{DOC}):2 =$$
$$= m(\widehat{BOC}):2 = 180^\circ:2 = 90^\circ$$ ……………………………………......………..….**3p**

4.Feladat

Péter kerékpárjának zárját egy háromjegyű szám ismeretében lehet kinyitni. Erről a számról a következőket tudjuk:

- minden számjegye különbözik egymástól,
- egyik számjegye sem kisebb négynél,
- osztható néggyel és hárommal,
- csak a százasok helyén áll páratlan számjegy.

Ha a lehetséges megoldásokat növekvő sorba állítjuk, akkor közülük az utolsó előtti szám nyitja a zárat.

Melyik ez a háromjegyű szám? Válaszod indokold!

Megoldás:
Hivatalból 1 pont.

A százasok helyére csak 5, 7 és 9 kerülhet…………………………………………….………………..….**2p**
A tízesek és az egyesek helyére a 4, 6, 8 számjegyek írhatók……………………………………...…**2p**

Az 546, 564, 548, 584, 568, 586 közül csak az 564 osztható néggyel és hárommal is……….….…..**1p**

A 746, 764, 748, 784, 768, 786 közül csak a 768 osztható néggyel és hárommal is………………..…..**1p**

A 946, 964, 948, 984, 968, 986 közül csak a 948 és a 984 osztható néggyel és hárommal is………….**1p**

Növekvő sorba rakva: 564, 768, 948, 984. ………………………………………..….……………...**1p**

A zárat a 948 nyitja……………………………………………………………..……..………………..**1p**